CAPITULO 5

# DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

**5-1 Introducción.** La rama de las matemáticas conocida con el nombre de Cálculo Diferencial gira en torno de un proceso especial de límite, *la diferenciación*, que será considerado con detalle en este capítulo. Dos tipos distintos de problemas — el problema físico de calcular la velocidad instantánea de una partícula móvil, y el problema geométrico de encontrar la tangente a una línea en uno de sus puntos — conducen de manera natural a la misma idea básica que contiene la noción de derivada. Aquí, no nos interesaremos demasiado por las aplicaciones de la diferenciación a la mecánica o a la geometría, y nos ceñiremos al estudio de las propiedades matemáticas generales de la derivada. Este capítulo trata de la diferenciación de *funciones reales* definidas en $E_1$ y el Capítulo 6 tratará de las generalizaciones a $E_n$.

**5-2 Definición de derivada.** Si $f$ es una función definida en un intervalo abierto $(a, b)$, para dos puntos distintos $x$ y $x_0$ de $(a, b)$ podemos formar el *cociente de diferencias*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Conservemos fijo $x_0$ y estudiemos el comportamiento de tal cociente al tomar $x$ valores tan próximos a $x_0$ como queramos.

5—1 DEFINICIÓN. *Sea $f$ definida en un intervalo abierto $(a, b)$, y supongamos que $x_0 \in (a, b)$. Se dice que $f$ tiene derivada en $x_0$ siempre que existe el límite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Este límite, que se escribe $f'(x_0)$, se llama la derivada de $f$ en $x_0$.*

Podemos pensar que el límite citado define, a partir de una función dada $f$, una nueva función $f'$, cuyo dominio está constituido por los puntos de $(a, b)$ en los que $f$ tiene derivada. La función $f'$ se llama la *derivada primera* de $f$. Análogamente la derivada $n$-ésima de $f$, que se representa por $f^{(n)}$, se define como la derivada primera de $f^{(n-1)}$, $n = 2, 3, \ldots$ (Según nuestra definición, no tiene sentido considerar $f^{(n)}$ a no ser que $f^{(n-1)}$ esté definida en un intervalo abierto.) Otras notaciones con las que el lector puede estar familiarizado son

$$f'(x) = Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} \qquad [\text{donde } y = f(x)],$$

u otras similares. La propia función $f$ algunas veces se escribe $f^{(0)}$.

5—2 Teorema. *Si $f$ tiene derivada en un punto $x_0$ de $(a, b)$, es continua en $x_0$.*

*Demostración.* Si $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$, podemos escribir

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Aplicando el Teorema 4-8 II), encontramos $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Esto prueba el aserto.

El próximo teorema nos proporciona una información más precisa sobre el comportamiento de $f$ en las proximidades de un punto en el que la derivada existe.

5—3 Teorema. *Si $f$ tiene derivada en un punto interior $x_0$ de $(a, b)$, existe un entorno $N(x_0)$ y un número positivo $M$ tal que $x \in N'(x_0)$ implica $|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|$.*

*Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, hay un entorno $N(x_0) \subset (a, b)$ tal que

$$x \in N'(x_0) \quad \text{implica} \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Si tomamos el entorno correspondiente a $\varepsilon = 1$, podemos escribir

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < |f'(x_0)| + 1$$

siempre que $x \in N'(x_0)$. La conclusión del teorema se deduce tomando $M = 1 + |f'(x_0)|$.

De las funciones para las que la conclusión del Teorema 5-3 es cierta, se dice que satisfacen la *condición de Lipschitz* en $x_0$. Geométricamente, esto significa que la gráfica debe quedar entre las dos rectas $y - f(x_0) = M(x - x_0)$ e $y - f(x_0) = -M(x - x_0)$ siempre que $x \in N'(x_0)$. (Ver Fig. 5-1.) El número $M$, naturalmente, depende de $x_0$. Las funciones que satisfacen la condición de Lipschitz en $x_0$ son automáticamente continuas en $x_0$, pero la recíproca no es cierta. (Ver Ejercicio 5-1.)

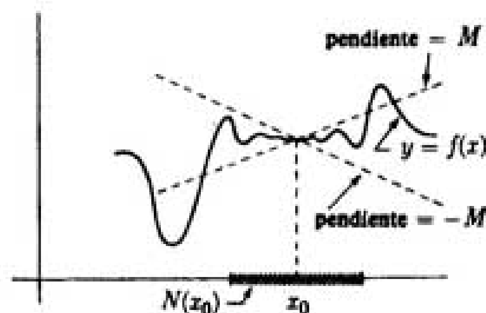


Fig. 5-1. Condición de Lipschitz en $x_0$

**5-3 Algebra de derivadas.** El lector no tendrá dificultad en deducir el teorema siguiente utilizando las demostraciones corrientes del cálculo elemental.

5—4 Teorema. *Si $f$ y $g$ están definidas en $(a, b)$, en todos los puntos en los que $f$ y $g$ admiten derivadas, las funciones $f + g$, $f - g$, y $f \cdot g$ también poseen derivadas. Esto también es cierto para la función $f/g$ en los puntos $x$ donde $g(x) \neq 0$. Estas derivadas vienen dadas por las fórmulas:*

$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$
$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g,$$
$$(f/g)' = [g \cdot f' - f \cdot g']/g^2 \qquad \text{(en los puntos en los que } g(x) \neq 0).$$

A partir de la definición vemos inmediatamente que si $f(x)$ es constante para todo valor de $x$, $f'(x)$ es siempre 0. Asimismo, si $f(x) = x$ es $f'(x) = 1$ para todo $x$. La aplicación reiterada del Teorema 5-4 nos dice que si $f(x) = x^n$ ($n$ entero positivo), la derivada $f'(x) = n\,x^{n-1}$ para todo $x$, Del mismo teorema deducimos que todo polinomio tiene derivada en todo $E_1$, y toda función racional admite derivada donde esté definida.

**5-4 La regla de la cadena.** Un resultado bastante más profundo concerniente a las derivadas es la llamada *regla de la cadena* para la diferenciación de una función compuesta.

5—5 Teorema (*Regla de la cadena*). *Sean $f$ continua en un intervalo cerrado $S$ y $f(S)$ la imagen de $S$ originada por $f$. Sea $g$ otra función definida en $f(S)$ y consideremos la función compuesta $gf$ definida para cada valor $x$ de $S$ mediante $gf(x) = g[f(x)]$. Supongamos que $x_0$ es un punto interior de $S$ tal que $y_0 = f(x_0)$ es un punto interior de $f(S)$. Admitamos, además que existan las dos derivadas $f'(x_0)$ y $g'(y_0)$. Entonces $gf$ posee derivada en $x_0$ y su valor es $f'(x_0)g'(y_0)$. Esto es,*

$$(gf)'(x_0) = g'[f(x_0)]\, f'(x_0).$$

*Demostración.* Tenemos que considerar el límite del cociente

$$\frac{gf(x) - gf(x_0)}{x - x_0}$$

cuando $x$ tiende a $x_0$. Como primer intento hacia la demostración, parece natural escribir

$$\frac{gf(x) - gf(x_0)}{x - x_0} = \frac{g[f(x)] - g[f(x_0)]}{f(x) - f(x_0)}\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si $x \to x_0$, el segundo factor del segundo miembro tiene como límite $f'(x_0)$ y el límite del primer factor debería ser $g'[f(x_0)]$. Sin embargo, esto no es legítimo pues el denominador $f(x) - f(x_0)$ del primer factor podría ser cero en todo entorno de $x_0$, y, por consiguiente, el primer factor sería indeterminado en tales puntos $x$. Por tanto, es necesario un razonamiento más preciso.

Escribamos $y_0 = f(x_0)$ y definamos una nueva función $h$ como sigue:

$$h(y) = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0) \qquad \text{si } y \neq y_0,\ y \in f(S), \qquad h(y_0) = 0.$$

Entonces tenemos $\lim_{y \to y_0} h(y) = 0$ a causa de la supuesta existencia de $g'(y_0)$. Luego $h$ es continua en $y_0$. Ahora bien, $h$ está definida en todo punto de $f(S)$ y, por tanto, tiene sentido considerar la función compuesta $hf$. Puesto que $f$ es continua en $x_0$ y $h$ lo es también en $y_0 = f(x_0)$, el teorema de la continuidad de las funciones compuestas (Teorema 4-11) nos dice que

$$\lim_{x \to x_0} hf(x) = h[f(x_0)] = h(y_0) = 0$$

Tomando $y = f(x)$ en la definición de $h$, podemos escribir

$$hf(x) = \frac{g[f(x)] - g(y_0)}{f(x) - y_0} - g'(y_0), \qquad \text{si } f(x) \neq y_0,$$

o

$$gf(x) - g(y_0) = [hf(x) + g'(y_0)][f(x) - y_0],$$

y esta igualdad subsiste incluso si $f(x) = y_0$. Ahora bien, conservemos $x \neq x_0$, y dividamos ambos miembros por $x - x_0$ para obtener

$$\frac{gf(x) - gf(x_0)}{x - x_0} = [hf(x) + g'(y_0)]\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Estamos ahora en condiciones de considerar el límite cuando $x \to x_0$. El segundo factor del segundo miembro tiene como límite $f'(x_0)$ y antes hemos visto que $\lim_{x \to x_0} hf(x) = 0$. Luego el primer miembro tiene por límite $g'(y_0)\ f'(x_0)$, como deseábamos demostrar.

**5-5 Derivadas laterales y derivadas infinitas.** Hasta ahora, el decir que $f$ tenía derivada en $x_0$ ha significado que $x_0$ era *interior* a un intervalo en el que $f$ estaba definida y que el límite $f'(x_0)$ era *finito*. Es conveniente extender el alcance de nuestras ideas con vistas a la discusión de las derivadas en los extremos de los intervalos. También es deseable introducir derivadas *infinitas*, de manera que la interpretación geométrica de derivada como la pendiente de la recta tangente sea válida aun en el caso en el que la tangente sea vertical. Debido a que en tal caso no podemos probar que $f$ es continua en $x_0$, exigimos explícitamente que lo sea.

5—6 Definición. *Sea f definida en un intervalo cerrado S y supongamos que f es continua en el punto $x_0$ de S. Se dice que f tiene derivada a la derecha de $x_0$ si el límite a la derecha*

$$\lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*existe y es finito, o si es $+\infty$ o $-\infty$. Este límite se expresa con la notación $f'_+(x_0)$. De forma análoga se define la derivada a la izquierda y se representa por $f'_-(x_0)$. Además, si $x_0$ es un punto interior de S, decimos que f tiene la derivada $f'(x_0) = +\infty$ si las dos derivadas a la izquierda y a la derecha de $x_0$ son $+\infty$. (La derivada $f'(x_0) = -\infty$ se define análogamente.)*

Es evidente que $f$ tiene derivada en $x_0$ si, y unicamente si, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ en cuyo caso $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$.

La Figura 5-2 ilustra alguno de estos conceptos. En el punto $x_1$ tenemos $f'_+(x_1) = -\infty$. En $x_2$ la derivada a la izquierda es 0 y a la derecha es $-1$. También, $f'(x_3) = -\infty$, $f'_-(x_4) = -1$, $f'_+(x_4) = +1$, $f'(x_6) = +\infty$, y $f'_-(x_7) = 2$. No existe derivada (ni a un lado ni al otro) en $x_5$, ya que $f$ no es continua allí.

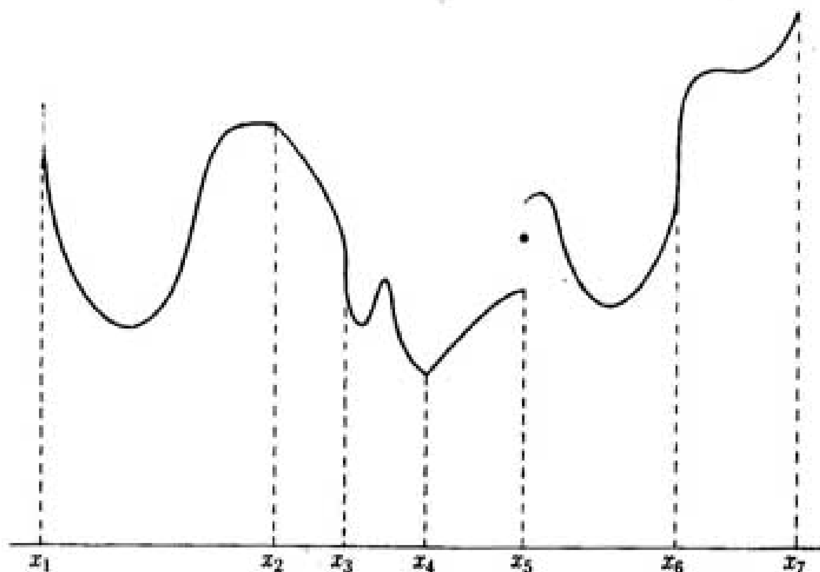



Fig. 5-2. Derivadas laterales y derivadas infinitas.

## 5-6 Funciones con derivada no nula.

5—7 Teorema. *Sea f definida en un intervalo abierto (a, b) y supongamos que en algún punto $x_0$ de (a, b) tenemos $f'(x_0) > 0$ o $f'(x_0) = +\infty$. Existe entonces un entorno $N(x_0) \subset (a, b)$ tal que para cada x de $N'(x_0)$ se verifica $f(x) > f(x_0)$ si $x > x_0$, y $f(x) < f(x_0)$ si $x < x_0$.*

*Demostración:* Supongamos que $f'(x_0)$ sea finita y positiva. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno $N(x_0) \subset (a, b)$ tal que

$$x \in N'(x_0) \quad \text{implica} \quad \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Tomemos el entorno correspondiente a $\varepsilon = \frac{1}{2} f'(x_0)$. Entonces si $x \in N'(x_0)$, tenemos

$$-\frac{1}{2} f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'x_0) < \frac{1}{2} f'(x_0),$$

o

$$0 < \frac{1}{2} f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{3}{2} f'(x_0).$$

Luego en este entorno el cociente $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ es positivo. Pero esto implica que $f(x) - f(x_0)$ tiene el mismo signo que $x - x_0$.

Si $f'(x_0) = +\infty$, habrá un entorno $N(x_0)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 1, \qquad \text{siempre que } x \in N'(x_0).$$

En este entorno el cociente es también positivo y la conclusión se deduce como antes.

Un resultado análogo al del Teorema 5-7 es legítimo, naturalmente, si $f'(x_0) < 0$ ó $f'(x_0) = -\infty$ en algún punto interior de $(a, b)$.

**5-7 Funciones con derivada nula.** Podemos utilizar el Teorema 5-7 para obtener el siguiente resultado importante que pone de manifiesto una conexión entre las derivadas y los máximos y mínimos relativos.

5—8 TEOREMA. *Sea $f$ definida en un intervalo abierto $(a, b)$ y supongamos que, $f$ posea un máximo o un mínimo relativo en un punto interior $x_0$ de $(a, b)$. Si $f$ tiene derivada en $x_0$, entonces $f'(x_0)$ debe ser* 0.

*Demostración.* Si $f'(x_0)$ es positiva o $+\infty$, $f$ no puede tener ni máximo ni mínimo relativo en $x_0$ a causa del Teorema 5-7. Por lo mismo, $f'(x_0)$ no puede ser negativa o $-\infty$. Pero, debido a que *existe* derivada en $x_0$, la única posibilidad es $f'(x_0) = 0$.

---

El recíproco del Teorema 5-8 no es cierto. En general, el conocimiento de que $f'(x_0) = 0$ no es suficiente para determinar si $f$ tiene un máximo o un mínimo en $x_0$. Efectivamente, puede ser que no exista ni uno ni otro, como puede verificarse con el ejemplo en que $f(x) = x^3$ y $x_0 = 0$. En este caso $f'(0) = 0$ pero $f$ es creciente en todo entorno de 0.

Además, hay que hacer notar que $f$ puede tener un máximo o un mínimo relativos en $x_0$ sin que $f'(x_0)$ se anule. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ pero, naturalmente, no posee derivada en $x = 0$. El teorema antes demostrado (5-8) supone que $f$ debe tener derivada (finita o infinita) en $x_0$. Asimismo $x_0$ debe ser un punto *interior* de $(a, b)$. En el ejemplo $f(x) = x$, $a \leq x \leq b$, $f$ alcanza su máximo y su mínimo en los extremos pero $f'(x)$ no se anula nunca en $[a, b]$.

**5-8 Teorema de Rolle.** Pensando en la representación geométrica es evidente que una curva suficientemente « regular » que corta al eje $ox$ en los dos extremos de un intervalo $[a, b]$ debe poseer un « punto de viraje » en algún punto comprendido entre $a$ y $b$. Un teorema de gran importancia en cálculo, conocido como el *teorema de Rolle*, precisa este hecho. Está contenido en la parte I) del siguiente teorema.

5—9 Teorema. *Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto $(a, b)$ y admitamos que tiene derivada (finita o infinita) en cada punto interior. Supongamos también que los dos límites $f(a+) = \lim_{x\to a+} f(x)$ y $f(b-) = \lim_{x\to b-} f(x)$ existen (y son finitos). Entonces tenemos :*

I) *Si $f(a+) = f(b-)$, existe por lo menos un punto interior $x_0$ de $(a, b)$ en el que $f'(x_0) = 0$.*

II) *Si $f'(x) \neq 0$ en todo punto $x$ de $(a, b)$, $f$ es monótona en $(a, b)$. Con más precisión, $f$ es estrictamente creciente si $f(a+) < f(b-)$ y estrictamente decreciente si $f(a+) > f(b-)$.*

*Demostración.* La hipótesis implica que $f$ es continua en el intervalo $(a, b)$. Definamos una nueva función $g$ así:

$$g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in (a, b), \qquad g(a) = f(a+), \qquad g(b) = f(b-).$$

De este modo $g$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y por tanto alcanza su máximo $M$ y su mínimo $m$ en algún punto de $[a, b]$. Si $f'(x)$ no se anula en $(a, b)$, el Teorema 5-8 nos dice que los valores extremos de $g$ no pueden ser alcanzados en puntos interiores.

Para demostrar I), supongamos que $f(a+) = f(b-)$. Si $f'(x) \neq 0$ para todo punto $x$ en $(a, b)$, se debe verificar $m = g(a) = g(b) = M$ (según las observaciones precedentes). Esto implica que $f$ es constante en $(a, b)$. Por consiguiente, la no anulación de $f'$ en $(a, b)$ es incompatible con la igualdad $f(a+) = f(b-)$. Esto demuestra I).

Para probar II) supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo $x$ en $(a, b)$ y que $f(a+) < f(b-)$. Entonces $m = g(a) < g(b) = M$, y, por tanto, $g(a) < g(x) < g(b)$ para todo $x$ de $(a, b)$. Tomando un valor fijo de $x$, $x = x_1$, $a < x_1 < b$, y aplicando el mismo razonamiento al intervalo cerrado $[x_1, b]$, encontramos que

$$g(x_1) < g(x) < g(b) \qquad \text{si} \qquad x_1 < x < b$$

Pero esto indica que $f(x_1) < f(x)$ siempre que $a < x_1 < x < b$. Luego $f$ es estrictamente creciente en $(a, b)$. (Si $f(a+) > f(b-)$, el razonamiento es el mismo.) Esto demuestra II).

**5-9 El Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.** Uno de los instrumentos más útiles del cálculo diferencial es el Teorema del Valor Medio.

5—10 TEOREMA (*Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial*). *Sea $f$ una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que $f$ posee derivada (finita o infinita) en cada punto interior. Supongamos además que los límites $f(a+)$ y $f(b-)$ existen y que satisfacen la condición*

$$f(a) - f(a+) = f(b) - f(b-).$$

*Existe entonces por lo menos un punto interior $x_0$ de $(a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

NOTA. La condición $f(a) - f(a+) = f(b) - f(b-)$ significa que el salto a la derecha de $a$ y el salto a la izquierda de $b$ deben tener la misma magnitud pero signos opuestos. En particular dicha condición se satisface si $f$ es continua en ambos extremos.

Geométricamente, el Teorema 5-10 establece que en una curva suficientemente «regular» que une dos puntos $A$ y $B$ existe una tangente que tiene la misma pendiente que la cuerda $AB$.

El Teorema del Valor Medio se obtendrá como corolario del siguiente teorema más general.

5—11 TEOREMA (*Teorema generalizado del Valor Medio*). *Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que cada una de ellas tenga derivada, finita o infinita, en todo punto interior. En los extremos, supongamos que existen los límites $f(a+)$, $f(b-)$, $g(a+)$ y $g(b-)$ y que satisfacen la relación*

I) $[f(a+) - f(b-)]\,[g(a) - g(b)] = [f(a) - f(b)]\,[g(a+) - g(b-)]$.

*Existe por lo menos un punto interior $x_0$ de $(a, b)$ tal que*

II) $f'(x_0)[g(b) - g(a)] = g'(x_0)[f(b) - f(a)]$.

NOTA. La hipótesis I) queda automáticamente si $f$ y $g$ son ambas continuas en los extremos de $[a, b]$. Si $g(x) = x$ resulta el Teorema 5-10.

*Demostración.* Si $x \in [a, b]$, sean $F(x) = f(x)[g(b) - g(a)]$ y $G(x) = g(x)$ $[f(b) - f(a)]$. Si existe en $(a, b)$ un punto $c$ en el que $F'(c)$ y $G'(c)$ son ambas $+\infty$ o ambas $-\infty$, la igualdad II) es cierta para $x_0 = c$, tomando ambos miembros el valor $+\infty$ o el $-\infty$. Supongamos que para ningún $x$ de $(a, b)$, $F'(x)$ y $G'(x)$ tomen ambas el valor $+\infty$ o el $\infty$, y consideremos $h(x) = F(x) - G(x)$. Entonces $h$ tiene derivada (finita o infinita) en cada $x$ de $(a, b)$ y

$h(a+) = h(b-)$. En virtud del Teorema de Rolle, debe ser $h'(x_0) = 0$ para un cierto $x_0$ interior a $(a, b)$, y esto demuestra II).

NOTA. El lector debería interpretar geométricamente el Teorema 5-11 refiriéndolo a la curva plana representada por las ecuaciones paramétricas $x = g(t)$, $y = f(t)$, $a \leq t \leq b$.

---

Hemos visto ya en el Teorema 5-9 que $f$ debe ser monótona en $(a, b)$ si $f'$ no es nunca nula. El mismo resultado puede obtenerse como consecuencia inmediata del Teorema del Valor Medio.

5—12 TEOREMA. *Si $f$ es continua en $[a, b]$ y posee derivada que toma únicamente valores positivos (finitos o infinitos) en el interior, $f$ es entonces estrictamente creciente en $[a, b]$. Si $f'$ toma únicamente valores negativos (finitos o infinitos) en $(a, b)$, $f$ es estrictamente decreciente en $[a, b]$. Si $f'(x) = 0$ en todo punto $x$ de $(a, b)$, $f$ es constante en todo $[a, b]$.*

*Demostración.* Si aplicamos el Teorema del Valor Medio a un intervalo arbitrario $[x_1, x_2]$ de $[a, b]$, encontramos

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1), \qquad \text{donde } x_0 \in (x_1, x_2).$$

Todas las proposiciones del teorema se deducen inmediatamente de esta igualdad.

Aplicando el Teorema 5-12 a la diferencia $f-g$, vemos que cuando dos funciones $f$ y $g$ son continuas en $[a, b]$ y sus derivadas son finitas e iguales en cada punto interior, las dos funciones $f$ y $g$ difieren en una constante en todo el intervalo $[a, b]$.

**5-10 Teorema del valor intermedio para las derivadas.** En el Teorema 4-22 del capítulo anterior hemos probado que una función $f$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre su máximo y su mínimo en dicho intervalo. En particular, $f$ alcanza todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Un resultado parecido demostraremos ahora para las funciones derivadas.

5—13 TEOREMA. *(Teorema del valor intermedio para las derivadas). Supongamos que $f$ está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que tiene derivada (finita o infinita) en cada punto interior. Supongamos también que $f$ tiene derivadas laterales finitas en los extremos $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ y que $f'_+(a) \neq f'_-(b)$. En tal caso, si $c$ es un número real comprendido entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$, existe por lo menos un punto interior $x$ tal que $f'(x) = c$.*

*Demostración.* Definamos una nueva función $g$ como sigue:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{si} \quad x \neq a, \qquad g(a) = f'_+(a).$$

Esta función $g$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Según el teorema del valor intermedio para las funciones continuas, $g$ toma todos los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ en el interior de $(a, b)$. En virtud del Teorema del Valor Medio, tenemos $g(x) = f'(x_0)$ para algún $x_0$ en $(a, x)$ siempre que $x \in (a, b)$. Por consiguiente $f'$ toma todos los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ en el interior de $(a, b)$. Un razonamiento semejante aplicado a la función $h$, definida por

$$h(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \qquad \text{si} \quad x \neq b, \qquad h(b) = f'_-(b),$$

demuestra que $f'$ toma todo valor comprendido entre $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ y $f'_-(b)$ en el interior de $(a, b)$. Combinando estos resultados, vemos que $f'$ toma todos los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ en el interior de $(a, b)$, y esto demuestra el teorema.

NOTA. El Teorema 5-13 es aun válido si una de las derivadas laterales $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ o ambas, son infinitas. La demostración en este caso se consigue considerando la función auxiliar $g$ definida mediante la ecuación $g(x) = f(x) - cx$, si $x \in [a, b]$. Los detalles se dejan al cuidado del lector. (Ver Ejercicio 5-22.)

**5-11 Fórmula de Taylor con resto.** El Teorema del Valor Medio ha sido ya interpretado geométricamente, pero existe otro aspecto del teorema que también nos ayuda a comprender su significado.

Si $f$ es continua en $[a, b]$ y tiene derivada en cada punto interior, dado $x$ en $(a, b]$, podemos escribir

$$f(x) = f(a) + f'(x_0)(x - a), \qquad \text{donde } a < x_0 < x.$$

Esta igualdad dice que la cantidad $f'(x_0)$ $(x - a)$ mide el error cometido cuando $f(x)$ es aproximado por $f(a)$. Desgraciadamente, el Teorema del Valor Medio no nos indica cómo puede calcularse $x_0$; dice simplemente que $a < x_0 < x$. Si $x$ no está muy alejado de $a$, $[f(x) - f(a)]/(x - a)$ será aproximadamente $f'(a)$. Esto es, $f'(x_0)$ será aproximadamente igual a $f'(a)$, y por consiguiente la igualdad

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

debe ser aproximadamente correcta cuando $x - a$ es pequeño. Esto significa que $f$ es aproximadamente una función lineal en las proximidades de $a$. El teorema de Taylor nos dice, con más generalidad, que $f$ puede aproximarse mediante un polinomio de grado $n - 1$ si $f^{(n)}$ existe en $(a, b)$. La importancia de este teorema radica en el hecho de que nos proporciona una expresión útil del error cometido por esa aproximación.

**5–14** TEOREMA (*Taylor*). *Sea $f$ una función que tiene derivada n-ésima finita $f^{(n)}$ en todo el intervalo abierto $(a, b)$ y supongamos que $f^{(n-1)}$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Consideremos un punto $x_0 \in [a, b]$. Entonces, para todo $x$ de $[a, b]$, $x \neq x_0$, existe un punto $x_1$ interior al intervalo que une $x$ con $x_0$ tal que*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_0)^n.$$

El teorema de Taylor se obtendrá como consecuencia de un resultado más general que es una extensión directa del Teorema del Valor Medio generalizado.

**5–15** TEOREMA. *Sean $f$ y $g$ dos funciones que poseen derivadas n-ésimas $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ en el intervalo abierto $(a, b)$ y las derivadas de orden $n - 1$ continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$. Entonces, para todo $x$ de $[a, b]$, $x \neq x_0$, existe un punto $x_1$ interior al intervalo que une $x$ con $x_0$ tal que*

$$\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right] g^{(n)}(x_1)$$
$$= f^{(n)}(x_1)\left[g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right].$$

NOTA. En el caso especial en que $g(x) = (x - x_0)^n$, tenemos $g^{(k)}(x_0) = 0$ para $0 \leq k \leq n - 1$ y $g^{(n)}(x) = n!$. Este teorema se reduce entonces al teorema de Taylor.

*Demostración.* Para simplificar, supongamos que $x_0 < b$ y que $x > x_0$. Mantengamos fijo $x$ y definamos dos nuevas funciones $F$ y $G$ de la siguiente manera:

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k,$$

$$G(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k,$$

para cada $t$ en $[x_0, x]$. Estas funciones $F$ y $G$ son continuas en el intervalo cerrado $[x_0, x]$ y tienen derivadas finitas en el intervalo abierto $(a, x)$. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 5-11 y escribir

$$F'(x_1)\,[G(x) - G(x_0)] = G'(x_1)\,[F(x) - F(x_0)], \qquad \text{donde } x_1 \in (x_0, x).$$

Esta igualdad se transforma en la:

a) $$F'(x_1)\,[g(x) - G(x_0)] = G'(x_1)\,[f(x) - F(x_0)],$$

ya que $G(x) = g(x)$ y $F(x) = f(x)$. Si, ahora, calculamos la derivada de la suma que define $F(t)$, teniendo en cuenta que cada término de la suma es un producto, encontramos que todos los términos se destruyan salvo uno, y nos resulta

$$F'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t).$$

Análogamente, obtenemos

$$G'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t).$$

Si ponemos $t = x_1$ y sustituimos en a), deducimos la fórmula del teorema.

## Ejercicios

En los siguientes ejercicios suponemos, donde sea preciso, un conocimiento de las fórmulas para la diferenciación de las funciones elementales trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

**5-1.** Se dice que una función $f$ satisface una condición de Lipschitz de orden $\alpha$ en $x_0$ si existe un número positivo $M$ (que puede depender de $x_0$) y un entorno $N(x_0)$ tal que

$$x \in N'(x_0) \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(x_0)| < M(x - x_0)^\alpha.$$

a) Demostrar que una función que satisface una condición de Lipschitz de orden $\alpha$ es continua en $x_0$ si $\alpha > 0$, y tiene derivada en $x_0$ si $\alpha > 1$.

b) Dar un ejemplo de una función que satisfaga una condición de Lipschitz de orden 1 en $x_0$ para la cual $f'(x_0)$ no exista.

**5-2.** En cada uno de los casos siguientes, determinar los intervalos en los que la función $f$ es creciente o decreciente y encontrar los máximos y mínimos (si existen) en el conjunto en el que cada $f$ está definida

a) $f(x) = x^3 + ax + b$, $\quad x \in E_1$.
b) $f(x) = \log(x^2 - 9)$, $\quad |x| > 3$.
c) $f(x) = x^{2/3}(x-1)^4$, $\quad 0 \le x \le 1$.
d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ si $x \ne 0$, $f(0) = 0$, $\quad 0 \le x \le \pi/2$.

**5-3.** Encontrar un polinomio $f$ de menor grado posible tal que

$$f(x_1) = a_1, \qquad f(x_2) = a_2, \qquad f'(x_1) = b_1, \qquad f'(x_2) = b_2,$$

siendo $x_1 \ne x_2$ y $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ números reales dados.

**5-4.** Definimos $f$ de la siguiente manera:

$f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \ne 0$, $f(0) = 0$. Demostrar que

a) $f$ es continua para todo $x$.
b) $f^{(n)}$ es continua para todo $x$, y que $f^{(n)}(0) = 0$, $(n = 1, 2, \dots)$.

**5-5.** Definimos $f$, $g$ y $h$ así: $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ y, si $x \neq 0$, $f(x) = \text{sen}\,(1/x)$, $g(x) = x\,\text{sen}\,(1/x)$, $h(x) = x^2\,\text{sen}\,(1/x)$.

Demostrar que

a) $f'(x) = -1/x^2 \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $f'(0)$ no existe.
b) $g'(x) = \text{sen}\,(1/x) - 1/x \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $g'(0)$ no existe.
c) $h'(x) = 2x\,\text{sen}\,(1/x) - \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $h'(0) = 0$; $\lim_{x\to 0} h'(x)$ no existe

**5-6.** Obtener la fórmula de Leibnitz para la derivada $n$-ésima de un producto $h$ de dos funciones $f$ y $g$:

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \qquad \text{donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**5-7.** Dadas dos funciones $f$ y $g$ definidas y que poseen derivadas terceras finitas $f'''(x)$ y $g'''(x)$ para todo $x$ en $E_1$. Si $f(x)g(x) = 1$ para cualquier $x$, demostrar que las relaciones a), b), c) y d) son válidas en todos los puntos en los que los denominadores no se anulan:

a) $f'(x)/f(x) + g'(x)/g(x) = 0$.

b) $f''(x)/f'(x) - 2f'(x)/f(x) - g''(x)/g'(x) = 0$.

c) $\dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - 3\dfrac{f'(x)g''(x)}{f(x)g'(x)} - 3\dfrac{f''(x)}{f(x)} - \dfrac{g'''(x)}{g'(x)} = 0$.

d) $\dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 = \dfrac{g'''(x)}{g'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2$.

NOTA. La expresión que aparece en el primer miembro de d) se llama la *derivada Schwarziana* de $f$ en $x$.

e) Demostrar que $f$ y $g$ tienen la misma derivada Schwarziana si

$$g(x) = [af(x) + b]/[cf(x) + d], \text{ donde } ad - bc \neq 0.$$

[*Indicación*: Si $c \neq 0$, escribir

$(af + b)/(cf + d) = (a/c) + (bc - ad)/[c(cf + d)]$, y aplicar d).]

**5-8.** Dadas cuatro funciones $f_1$, $f_2$, $g_1$, $g_2$ que poseen derivadas en $(a, b)$. Definida $F$ por medio del determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}, \qquad \text{si } x \in (a, b).$$

a) Demostrar que $F'(x)$ existe para todo $x$ en $(a, b)$ y que

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'_1(x) & f'_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g'_1(x) & g'_2(x) \end{vmatrix}.$$

b) Establecer y demostrar un resultado más general para determinantes de orden $n$.

**5-9.** Dadas $n$ funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, admitiendo cada una derivada de orden $n$ en $(a, b)$. Una función $W$, llamada *Wronskiano* de $f_1, \ldots, f_n$, se define como sigue: Para cada $x$ de $(a, b)$, $W(x)$ es el valor del determinante de orden $n$ cuyo elemento perteneciente a la fila $k$ y a la columna $m$ es $f_m^{(k-1)}(x)$, donde $k = 1, 2, \ldots, n$ y $m = 1, 2, \ldots, n$. [En lugar de los términos $f_m^{(0)}(x)$ se escribe $f_m(x)$.]

a) Demostrar que $W'(x)$ puede obtenerse reemplazando la última fila del determinante que define $W(x)$ por las derivadas $n$-ésimas $f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x), \ldots, f_n^{(n)}(x)$.

b) Suponiendo la existencia de $n$ constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no simultáneamente nulas, tales que $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x) = 0$ para todo $x$ de $(a, b)$, demostrar que $W(x) = 0$ para cada $x$ en $(a, b)$.

NOTA. Un conjunto de funciones que satisfacen una tal relación se llama un *conjunto linealmente dependiente* en $(a, b)$.

c) La anulación del Wronskiano en todo el intervalo $(a, b)$ es necesaria, pero no suficiente, para la dependencia lineal de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Demostrar que en el caso de dos funciones, si el Wronskiano se anula en todo el intervalo $(a, b)$ y una de ellas no se anula en $(a, b)$, entonces forman un conjunto linealmente dependiente en $(a, b)$.

**5-10.** Dada una función $f$ definida en el intervalo $(a, b)$, con derivada finita en él y tal que $\lim_{x \to b-} f(x) = +\infty$. Demostrar que $\lim_{x \to b-} f'(x)$ o no existe o es infinito.

**5-11.** Demostrar que la fórmula del Teorema del Valor Medio puede escribirse en la forma siguiente:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \quad \text{donde } 0 < \theta < 1.$$

Determinar $\theta$ como una función de $x$ y $h$ cuando

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$,
c) $f(x) = e^x$, d) $f(x) = \log x$, $x > 0$.

Mantener fijo $x \neq 0$, y calcular $\lim_{h \to 0} \theta$ en cada caso.

**5-12.** En el Teorema 5-15 considerar $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ y $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$. Demostrar que $f'(x)/g'(x)$ nunca es igual al cociente $[f(1) - f(0)]/[g(1) - g(0)]$ si $0 < x \leq 1$. ¿Cómo conciliar esto con la igualdad

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}, \qquad a < x_1 < b,$$

que se obtiene del Teorema 5-15 cuando $n = 1$?

**5-13.** En cada uno de los siguientes casos especiales del Teorema 5-15, considerar $n = 1$, $x_0 = a$, $x = b$, y demostrar que $x_1 = (a + b)/2$.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$; b) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

¿Puede encontrarse una clase general de tales pares de funciones $f$ y $g$ para las que $x_1$ valga siempre $(a + b)/2$ de manera que los dos ejemplos a) y b) pertenezcan a dicha clase?

**5-14.** Dada una función $f$ definida y con derivada $f'$ finita en el intervalo semiabierto $0 < x \leq 1$ y tal que $|f'(x)| < 1$. Definir $a_n = f(1/n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} a_n$. [*Indicación*: Utilizar la condición de Cauchy].

**5-15.** Suponiendo que $f$ tiene derivada finita en cada punto del intervalo abierto $(a, b)$ y que existe $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ y es finito en un punto interior $x_0$, demostrar que el valor de ese límite debe ser $f'(x_0)$.

**5-16.** Sea $f$ una función continua en $(a, b)$ con derivada finita $f'$ en todo el intervalo $(a, b)$, excepto acaso en $x_0$. Si el $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ existe y vale $A$, demostrar que debe también existir $f'(x_0)$ y que toma el valor $A$.

**5-17.** Sea $f$ continua en $[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f'(x)$ finita para cada $x$ de $(0, 1)$. Probar que si $f'$ es función creciente en $(0, 1)$, también lo es la función $g$ definida mediante la ecuación $g(x) = f(x)/x$.

**5-18.** Sea $h$ un número positivo fijo. Demostrar que no existe función alguna $f$ que satisfaga las tres condiciones siguientes: $f'(x)$ existe para $x \geq 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) \geq h$ para $x > 0$.

**5-19.** Suponiendo que $f$ y $g$ tienen derivadas continuas, utilizar el Teorema del Valor Medio para deducir la regla de la cadena de diferenciación de la función compuesta $gf$.

**5-20.** Si $h > 0$ y $f'(x)$ existe (y es finita) para todo $x$ en $(a - h, a + h)$, y si $f$ es continua en $[a - h, a + h]$, demostrar que se verifica:

a) $$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{h} = f'(a + \theta h) + f'(a - \theta h), \qquad 0 < \theta < 1;$$

b) $$\frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h} = f'(a + \lambda h) - f'(a - \lambda h), \qquad 0 < \lambda < 1.$$

c) Si $f''(a)$ existe, demostrar que

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h^2}.$$

d) Dar un ejemplo en el que el límite del cociente que aparece en c) exista pero en cambio $f''(a)$ no exista.

**5-21.** Sea $f$ una función con derivada finita en $(a, b)$ y supongamos que $x_0 \in (a, b)$. Consideremos la condición siguiente: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno $N(x_0; \delta)$, cuyo radio $\delta$ depende únicamente de $\varepsilon$ y no de $x_0$, tal que si $x \in N'(x_0; \delta)$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Demostrar que $f'$ es continua en $(a, b)$ si esta condición es válida en todo el intervalo $(a, b)$.

**5-22.** Demostrar el Teorema 5-13 si una de las derivadas $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ es infinita o lo son ambas.

**5-23.** Dar un ejemplo de un par de funciones $f$ y $g$ que tengan derivadas finitas en $(0, 1)$, tales que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

pero en cambio que $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$ no exista, eligiendo $g$ de tal manera que $g'(x)$ no sea nunca cero.

**5-24.** Demostrar el siguiente teorema:

*Dadas dos funciones $f$ y $g$ que poseen derivadas n-ésimas finitas en $(a, b)$. Supongamos que para algún punto interior $x_1$ de $(a, b)$, ocurra que $f(x_1) = f'(x_1) = \ldots = f^{(n-1)}(x_1) = 0$ y que $g(x_1) = g'(x_1) = \ldots = g^{(n-1)}(x_1) = 0$, pero que $g^{(n)}(x_1)$ no se anule nunca en $(a, b)$. Demostrar que*

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_1)}{g^{(n)}(x_1)}.$$

NOTA. Se supone que $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ no son continuas en $x_1$. [*Indicación*: Poner $F(x) = f(x) - (x - x_1)^{n-1} f^{(n-1)}(x_1)/(n-1)!$, definir $G$ de manera parecida y aplicar el Teorema 5-15 a las funciones $F$ y $G$.]

**5-25.** Demostrar que la fórmula del teorema de Taylor puede también escribirse del siguiente modo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)(x - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_1),$$

donde $x_1$ es interior al intervalo que une $x$ con $x_0$. Sea $1 - \theta = (x - x_1)/(x - x_0)$. Demostrar que $0 < \theta < 1$ y obtener la siguiente forma del resto (debida a Cauchy);

$$\frac{(1 - \theta)^{n-1}(x - x_0)^n}{(n-1)!} f^{(n)}[\theta x + (1 - \theta)x_0].$$

[*Indicación*: Tomar $G(t) = g(t) = t$ en la demostración del Teorema 5-15.]